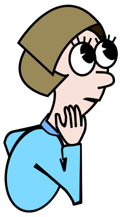

SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Il mostro che nasconde il quadrato

QUESITO

Quale fattoriale in posizione dispari (quindi uno fra i seguenti: $1!$, $3!$, $5!, \ldots$, $199!$) bisogna eliminare dal prodotto sottostante, detto “**mostro**”, per ottenere un quadrato perfetto?

$$\boxed{1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 199!\cdot 200!}$$

SOLUZIONE → $\boxed{99!}$

POSSIBILE SVOLGIMENTO

Considerando la definizione di fattoriale si ha che $(n+1)! = (n!)\cdot(n+1)$, per cui il prodotto di due fattoriali consecutivi $(n!)\cdot[(n+1)!]$ può essere portato nella forma $(n!)\cdot(n!)\cdot(n+1)$, cioè $(n!)^2\cdot(n+1)$. Ciò permette di riscrivere i fattori del “mostro” come mostrato in basso

$$\underbrace{1!\cdot 2!}_{(1!)^2\cdot 2}\cdot\underbrace{3!\cdot 4!}_{(3!)^2\cdot 4}\cdot\underbrace{5!\cdot 6!}_{(5!)^2\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\underbrace{197!\cdot 198!}_{(197!)^2\cdot 198}\cdot\underbrace{199!\cdot 200!}_{(199!)^2\cdot 200}$$

Utilizzando le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione, possiamo separare nel prodotto appena scritto i quadrati dai fattori pari, ed ottenere…

$$\left[(1!)^2\cdot(3!)^2\cdot(5!)^2\cdot\ldots\cdot(197!)^2\cdot(199!)^2\right]\cdot\left[2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 198\cdot 200\right]$$

Il fattore di destra è composto da 100 fattori pari. Estraendo da ciascuno di essi il “2” si ottiene

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 198\cdot 200=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{100\ volte\ 2}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100=2^{100}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100)=2^{100}\cdot(100!)$$

Tiriamo le fila e riassembliamo tutti i pezzi:

$$1!\cdot 2!\cdot\ldots\cdot 199!\cdot 200!=(1!)^2\cdot(3!)^2\cdot(5!)^2\cdot\ldots\cdot(197!)^2\cdot(199!)^2\cdot 2^{100}\cdot(100!)$$

Il “mostro” è quindi il prodotto di un certo numero di quadrati (anche 2^{100} lo è) e del fattore $100!$. Dal momento che $100!$ si può riscrivere come $100! = 100\cdot(99!)$ e visto che anche 100 è un quadrato perfetto, otteniamo finalmente …

$$1!\cdot 2!\cdot\ldots\cdot 199!\cdot 200!=(1!)^2\cdot(3!)^2\cdot(5!)^2\cdot\ldots\cdot(197!)^2\cdot(199!)^2\cdot 2^{100}\cdot 100\cdot 99!=\ldots$$

$$\ldots=\left(1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 197!\cdot 199!\cdot 2^{50}\cdot 10\right)^2\cdot 99!$$

… uguaglianza che fuga ogni incertezza: togliendo il fattore $99!$, quello che resta è proprio un quadrato!