SOLUZIONE DELL'ENIGMA

I serpenti aritmetici

QUESITO

In quanti modi si può rappresentare l'intero $10^{1.000.000}$ come somma di numeri naturali consecutivi (0 escluso)?

SOLUZIONE → **1.000.001**

POSSIBILE SVOLGIMENTO

Affrontiamo la questione da un punto di vista generale e consideriamo un numero naturale N e un suo divisore dispari d. Abbiamo quindi ${}^{N}/_{d} = k \in \mathbb{N}$, per cui possiamo riscrivere N nel seguente modo:

$$N = \underbrace{k \; + \; k \; + \; \dots \; + \; k}_{d \text{ volte}}$$

Visto che d è dispari, la somma precedente avrà un elemento centrale. Possiamo allora sommare agli elementi alla sua destra i numeri crescenti $1, 2, \dots$ e sottrare gli stessi numeri a sinistra: ciò manterrà la somma invariata e produrrà un serpente aritmetico (cioè una sequenza di numeri naturali consecutivi). Per convincersene basta osservare i due esempi riguardanti il numero 18 e i suoi divisori dispari 3 e 9 (per maggiore chiarezza nell'illustrazione in basso l'elemento centrale è stato sempre incorniciato):

$18 = 3 \cdot \boxed{6}$
$\begin{array}{ccccc} 6 & + & \boxed{6} & + & 6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & + & \boxed{6} & + & 7 \end{array}$
$18 = \boxed{5+6+7}$

$18 = 9 \cdot \boxed{2}$
$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 2 & + & 2 & + & 2 & + & 2 & + & \boxed{2} & + & 2 & + & 2 & + & 2 & + & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ -2 & + & -1 & + & 0 & + & 1 & + & \boxed{2} & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 \end{array}$
$18 = \cancel{-2}\; \cancel{-1} + \cancel{0} + \cancel{1} + \cancel{2} + 3 + 4 + 5 + 6 = \boxed{3+4+5+6}$

Il secondo esempio è particolarmente interessante perché dimostra che, ammettendo nello sviluppo anche lo zero e gli interi negativi, si può sempre disporre di una rappresentazione con numero dispari di elementi (basterà aggiungere $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ secondo necessità). Vediamo a titolo di esempio la trasformazione di uno sviluppo pari come $\boxed{4+5+6+7}$ (4 elementi) in uno dispari: anteponendo ai quattro addendi i sette elementi di somma nulla $\boxed{-3-2-1+0+1+2+3}$ il gioco è fatto: lo sviluppo dispari associato a $\boxed{4+5+6+7}$ sarà quindi $\boxed{-3-2-1+0+1+2+3+4+5+6+7}$. Incorniciando l'elemento centrale, si può inoltre operare con facilità la "deserpentinizzazione" della sequenza:

$$\boxed{-3-2-1+0+1+\boxed{2}+3+4+5+6+7} \longrightarrow \boxed{2+2+2+2+2+\boxed{2}+2+2+2+2+2}$$

Senza calcolare alcunché è ora chiaro che la somma di $\boxed{4+5+6+7}$ è 22, perché la sequenza in alto a destra è composta da undici $\boxed{2}$. In generale, in ogni sviluppo dispari, la somma totale (N) è uguale al prodotto dell'elemento centrale (k) per la lunghezza del serpente (d) (dove d è dispari, giova ricordarlo). Annodando i fili del discorso, abbiamo trovato il seguente risultato fondamentale:

Ad ogni divisore dispari di un numero naturale corrisponde un ben determinato serpente e ad ogni serpente corrisponde un ben determinato divisore dispari.

Possiamo finalmente risolvere l'Enigma e rivolgere la nostra attenzione al *Megamajorone* $10^{1.000.000}$, cioè al numero $2^{1.000.000} \cdot 5^{1.000.000}$. I divisori dispari di $10^{1.000.000}$ sono tutti e soli i numeri nella forma 5^m, con $m = 0,1,2, \dots, 1.000.000$. Si tratta di $1.000.001$ casi diversi, come volevasi dimostrare.