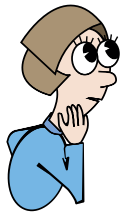

SOLUZIONE DELL'ENIGMA

La Serie dell'Enigma

QUESITO

Considerando che la serie di Mengoli $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$ converge a un certo valore finito M, rispondi alla seguente domanda:

A quale valore converge la serie $\boxed{Z}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$?

RISPOSTA $\boxed{{}^1\!/_4}$

POSSIBILE SVOLGIMENTO

Invece della serie proposta, consideriamo la versione raddoppiata $2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\right)=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$, leggermente più facile da trattare. Dovremo ricordarci alla fine del calcolo di dividere il risultato per 2.

Consideriamo quindi $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$ e sostituiamo i numeratori con differenze equivalenti come mostrato accanto: $\frac{3-1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{4-2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{5-3}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots=$. "Spezzando" le frazioni si arriva a…

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{5}{3\cdot 4\cdot 5}-\frac{3}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots=\text{, cioè}$$

$$\frac{\cancel{3}}{1\cdot 2\cdot \cancel{3}}-\frac{\cancel{1}}{\cancel{1}\cdot 2\cdot 3}+\frac{\cancel{4}}{2\cdot 3\cdot \cancel{4}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot 4}+\frac{\cancel{5}}{3\cdot 4\cdot \cancel{5}}-\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4\cdot 5}+\ldots=\text{ e quindi}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$$

Gli addendi dal secondo in poi si semplificano a coppie, il che permette di giungere al seguente valore: $\frac{1}{1\cdot 2}-\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}+\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot 4}}+\cancel{\frac{1}{3\cdot 4}}-\cancel{\frac{1}{4\cdot 5}}+\cancel{\frac{1}{4\cdot 5}}\ldots=\boxed{\frac{1}{2}}$. Ricordando che il risultato ottenuto è il doppio di quanto richiesto dall'Enigma, otteniamo infine $\boxed{\boxed{\frac{1}{4}}}$.

Nota: il procedimento può essere facilmente generalizzato a $Z_4=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$, $Z_5=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$ *e in generale a* Z_n, *ragionando non già con le serie raddoppiate, ma moltiplicate per* n, *cioè con* $n\cdot Z_n$ *. I valori a cui tendono* $Z_4, Z_5, \ldots$ *sono dati dalla formula* $Z_{n+1}=\frac{1}{n\cdot(n!)}$ *(dove* $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ *è il simbolo di fattoriale), per cui* $Z_4=\frac{1}{18}; Z_5=\frac{1}{96}; Z_6=\frac{1}{600}$ *e così via. Curiosità: è convergente anche la "serie delle serie"* $Z_2+Z_3+Z_4+\cdots$