SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Magie algebriche

QUESITO

Considera le seguenti tre *serie di potenze* $\boldsymbol{G} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ (serie Geometrica), $\boldsymbol{L} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ e $\boldsymbol{Q} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots$ (serie geo-Quadratica). Per $x = 0$ valgono tutte 1, mentre per $x = ½$ si ottengono i valori $G = 2,\ L = 4$ e $Q = 12$ (per questo dovete fidarvi). Per ogni x per i quali le serie restituiscono numeri finiti, i valori G, L, Q sono legati da semplici espressioni algebriche.

L e G sono legati dalla relazione $\boxed{L = G^2}$

Dimostrazione

Come si vede a fianco, l'espressione $G + G \cdot x + G \cdot x^2 + G \cdot x^3 + \cdots$ è uguale a $1 + 2x + 3x^2 + \cdots$ e quindi a L. Del resto se nell'espressione $G + G \cdot x + G \cdot x^2 + G \cdot x^3 + \cdots$ si raccoglie la G si ottiene $G \cdot (1 + x + x^2 + \cdots)$, cioè $G \cdot G$. Resta così provato che $L = G^2$.

G	=	1	+ x	+ x²	+ x³	+ …
+			+	+	+	
G·x	=		x	+ x²	+ x³	+ …
+				+	+	
G·x²	=			x²	+ x³	+ …
+					+	
G·x³	=				x³	+ …
+						
…	=					…
somma	=	1	+ 2x	+ 3x²	+ 4x³	+ …

L'Enigma recita: Trova una relazione algebrica che leghi $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{G}$

SOLUZIONE $Q = G^2(1 + 2xG)$ o $Q = G^3(1 + x)$

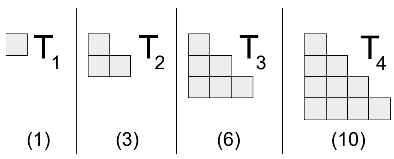
Osserviamo prima di tutto che esistono infinite soluzioni: per ogni valore di x per il quale G è finito, si ha infatti che $xG = G - 1$ (è facile osservare che il prodotto xG ricrea tutti gli addendi di G tranne 1) , da cui si ricava $\boxed{G = \frac{1}{1-x}}$. Quest'ultima formula permette, tra le altre cose, di riscrivere la soluzione presentata sopra a sinistra in varie forme, tra le quali $Q = G^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $Q = G^3(1 + x)$, $Q = \frac{x+1}{(1-x)^3}$ (e così via).

POSSIBILE SVOLGIMENTO

A fianco sono mostrati la serie G^3 (*in alto*) e $G^3(x+1)$ (*in basso*): $G^3(x+1)$ pare proprio essere la serie geo-Quadratica $\boldsymbol{Q}$.

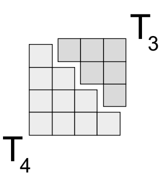
Per non affidarci a semplici suggestioni, osserviamo i coefficienti di G^3: si tratta dei famosi *numeri triangolari*, definiti in basso:

Si chiama *numero triangolare* T_n la somma dei primi n numeri naturali a partire da 1. Si ha $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + 2 = 3$, $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ e così via. La rappresentazione "a blocchetti" mostrata in basso spiega il loro nome:



G²	=	1	+ 2x	+ 3x²	+ 4x³	+ …
+			+	+	+	
G²·x	=		x	+ 2x²	+ 3x³	+ …
+				+	+	
G²·x²	=			x²	+ 2x³	+ …
+					+	
G²·x³	=				x³	+ …
+						
…	=					…
G²·G	=	1	+ 3x	+ 6x²	+ 10x³	+ …

G³	=	1	+ 3x	+ 6x²	+ 10x³	+ …
+			+	+	+	
G³·x	=		x	+ 3x²	+ 6x³	+ …
G³·(x+1)	=	1	+ 4x	+ 9x²	+ 16x³	+ …



Utilizzando nuovamente la rappresentazione "a blocchetti", si riconosce immediatamente l'uguaglianza $T_{n-1} + T_n = n^2$: questo mostra che la comparsa dei "numeri giusti" era tutt'altro che incidentale: i coefficienti di $G^3(x+1)$ sono effettivamente i quadrati dei numeri naturali.