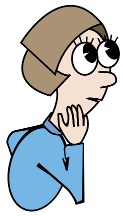

SOLUZIONE DELL'ENIGMA

La Cromomatematica

La *Cromomatematica* è una teoria costruita sui seguenti assiomi:

Assioma di **colorazione**	Tutti i numeri naturali (0,1,2,3, ...) sono rossi, verdi o gialli	Assioma di **unicità**	Nessun numero ha più di un colore
Assioma di **cattivo vicinato**	Due numeri gialli non possono essere consecutivi	Assioma **dell'anno**	2019 è un numero verde

Assiomi di **calcolo**:
- La somma di due numeri verdi è un numero rosso
- La somma di due numeri rossi è un numero verde

L'Enigma recita: Di che colore è il $mille$?

SOLUZIONE: **La *Cromomatematica* è impossibile**

Perché il nostro sia un sistema assiomatico, dobbiamo provare prima di tutto che gli assiomi non si contraddicano vicendevolmente. Una volta fatto questo potremmo dimostrare teoremi o eventualmente confutare ipotesi proprio come si fa in Geometria e in tutte le altre branche della Matematica. In verità l'**assioma dell'anno** è in contraddizione con il gruppo costituito dagli altri assiomi (che chiameremo "assiomi di base"), ragion per cui la risposta all'Enigma è un categorico *"La Cromomatematica è impossibile*". È possibile dimostrare rapidamente la contraddittorietà tra *assiomi di base* e *assioma dell'anno*, è però molto più divertente sviluppare la "Cromomatematica degli assiomi di base" per vedere fin dove si può arrivare con la sola logica. Per fare le cose per bene introduciamo una simbologia specifica che ci permetterà di sveltire i passaggi:

Simbologia e Lessico

Se n è un numero naturale, scriviamo $(n)_G$ per specificare che il colore di n è il giallo, con $(n)_{C1}$ che n ha un certo colore *non giallo* $C1$ e con $(n)_{C2}$ che n ha l'altro colore *non giallo* $C2$. Se di n vogliamo indicare il colore senza però indicare la sua categoria scriveremo $(n)_x$.

Come si vede, la simbologia introdotta si basa sulla dicotomia $giallo - non\ giallo$ e, all'interno dei colori *non gialli*, sulla contrapposizione $colore\ 1 - colore\ 2$. Per questo motivo è utile definire tra due numeri *non gialli* a e b (e soltanto fra essi) le seguenti relazioni:

- $a \nsim b$ se a e b hanno colori (non gialli) diversi. Diremo in questo caso che a e b sono *discromi*.
- $a \sim b$ se a e b hanno lo stesso colore (non giallo). Diremo che a e b sono *isocromi*.

Teorema

$\boxed{P2}$ **Proprietà del doppio**: $\boxed{n \nsim 2n}$ o, espresso in altro modo, $\boxed{2 \cdot (n)_{C1} = (2n)_{C2}}$
(cioè il doppio di un numero di colore *non giallo* $C1$ ha il colore *non giallo* $C2$)

Dimostrazione:

$$2 \cdot (n)_{C1} = (n)_{C1} + (n)_{C1} \xrightarrow{A.\ di\ calcolo} (2n)_{C2}$$

Teorema

$\boxed{T012}$ **(0) è un numero giallo, (1) e (2) sono *non gialli* discromi**

Dimostrazione:

(0) è uguale al suo doppio, se fosse *non giallo* si avrebbe per $\boxed{P2}$ la contraddizione $0 \nsim 0$.

Visto che (0) è giallo, per l'assioma di cattivo vicinato (1) è non giallo

(2) è il doppio di (1) che è *non giallo*, per $\boxed{P2}$ si ha quindi $2 \nsim 1$.

$\boxed{CV}$ **Teorema di *cattivo vicinato generalizzato*: tre numeri naturali consecutivi sono tutti di colore diverso**

$\boxed{CV1}$ **Parte 1: è impossibile che due numeri consecutivi abbiano lo stesso colore.**

Dimostrazione:

Ragioniamo per assurdo e supponiamo $n \sim n+1$. L'assioma di *cattivo vicinato* esclude che si possa trattare di *numeri gialli*. Si ha quindi $(n)_{C1} + (n+1)_{C1} \xrightarrow{A.\ di\ calcolo} (2n+1)_{C2}$ e anche $2 \cdot (n)_{C1} \xrightarrow{\boxed{P2}} (2n)_{C2}$ e $2 \cdot (n+1)_{C1} \xrightarrow{\boxed{P2}} (2n+2)_{C2}$. Avremmo così trovato 3 numeri consecutivi isocromi $(2n)_{C2}$, $(2n+1)_{C2}$, $(2n+2)_{C2}$. Visto che $(2n)_{C2} + (1)_x = (2n+1)_{C2}$ e che per $\boxed{T012}$ (1) è *non giallo*, necessariamente dovrà essere $(1)_{C1}$ per non contraddire gli *assiomi di calcolo.* Partendo invece da $(2n)_{C2} + (2)_x = (2n+2)_{C2}$ e seguendo lo stesso ragionamento si arriva a $(2)_{C1}$. Tutto riassunto si ottiene $1 \sim 2$, in contraddizione con $\boxed{P2}$ (e con $\boxed{T012}$).

$\boxed{CV2}$ **Parte 2: è impossibile che due numeri *non gialli* distanziati di 2 abbiano lo stesso colore.**

Dimostrazione:

La dimostrazione è del tutto simile alla precedente. Si assume per assurdo che $n \sim n+2$ e che n sia *non giallo*. Si trova così $(n)_{C1} + (n+2)_{C1} = (2n+2)_{C2}$ ma anche per $\boxed{P2}$ $2(n+2)_{C1} = (2n+4)_{C2}$ e $2(n)_{C1} = (2n)_{C2}$. Da $(2n)_{C2}$ e $(2n+2)_{C2}$ e da $\boxed{T012}$ (che ci dice che (2) è *non giallo*) ricaviamo $(2)_{C1}$, mentre da $(2n)_{C2}$ e $(2n+4)_{C2}$ si arriva a $(4)_{C2}$ (dal momento che anche $(4) = (2)+(2)$ è *non giallo*). In pratica abbiamo trovato $2 \sim 4$, in contraddizione con $\boxed{P2}$.

$\boxed{CV3}$ **Parte 3: è impossibile che due numeri *gialli* siano distanziati di 2.**

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che $n \sim n+2$ e che n si giallo (con $n > 1$). Per assioma di *cattivo vicinato* saranno non gialli i tre interi $n-1$, $n+1$ e $n+3$ e, per quanto dimostrato sopra, dovrà $n+1$ dovrà essere discromo tanto a $n-1$ quanto a $n+3$. Ma allora $n+3 \sim n-1$ e quindi $(n-1)_{C2} + (n+3)_{C2} = (2n+2)_{C1}$. D'altro canto per $\boxed{P2}$ si avrebbe $2 \cdot (n+1)_{C1} = (2n+2)_{C2}$ in contraddizione con quanto dimostrato prima e dell'*assioma di unicità*.

Teorema di regolarità

$\boxed{TR}$ $(n)_x + 3 = (n+3)_x$ (cioè ogni colore si ripete di tre in tre)

Dimostrazione:

Per $\boxed{CV}$ non solo $n+2$ e $n+1$ non possono avere lo stesso colore fra loro, ma nessuno dei due può avere lo stesso colore di n e nessuno dei due può avere lo stesso colore di $n+3$. Se anche n e $n+3$ avessero colori diversi, servirebbero ben 4 tinte per colorare i quattro numeri, circostanza esclusa dall'*assioma di colorazione*.

Teorema finale

$\boxed{TF}$ L'insieme degli *assiomi di base* è compatibile con due sole colorazioni, entrambe mostrate in basso:

numeri naturali	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Colorazione possibile A	G	V	R	G	V	R	G	V	R	…
Colorazione possibile B	G	R	V	G	R	V	G	R	V	…

$Dimostrazione$:
$\boxed{T012}$ non lascia alternative per i primi tre colori e il *teorema di regolarità* fa il resto.

Corollario

$\boxed{C2019}$ 2019 è un numero giallo.

$Dimostrazione$:
Entrambe le colorazioni imposte da $\boxed{TF}$ prevedono che tutti i multipli di 3 siano gialli e 2019 è un multiplo di 3 $(2019 = 3 \cdot 673)$