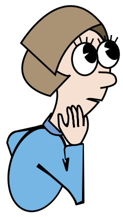


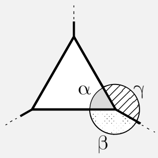
SOLUZIONE DELL'ENIGMA

# *I Poligiri*

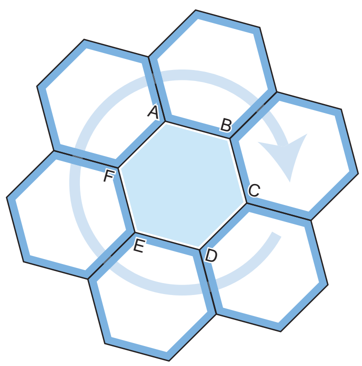
**QUESITO**

Esagono regolare, quadrato e triangolo equilatero sono *nuclei di Poligiri*, cioè poligoni regolari intorno ai quali è possibile disporre una serie di altri poligoni, in modo da rispettare le seguenti poche semplici regole.

1 Esiste un poligono interno ed è regolare
2 I poligoni esterni sono tutti regolari e identici fra loro
3 In ogni vertice del poligono interno insistono gli angoli di esattamente tre poligoni a coprire l'intero angolo giro (*vedi disegno a fianco* →).

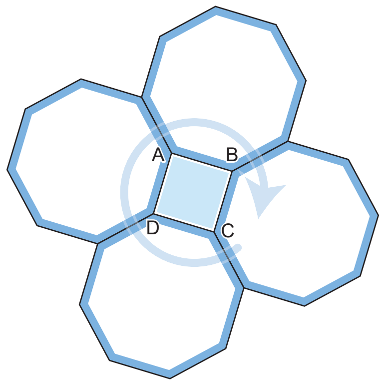



Poligiro 6 | 6



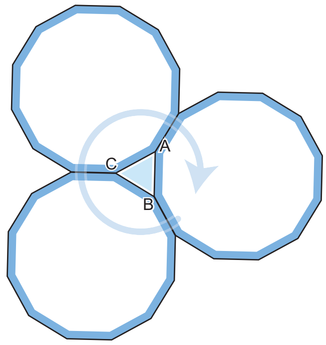

Esagono (**6**) circondato da esagoni (**6**)

Poligiro 4 | 8




quadrato (**4**) circondato da ottagoni (**8**)

Poligiro 3 | 12

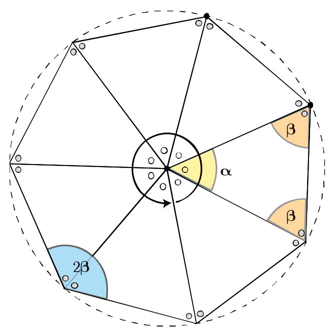



triangolo (**3**) circondato da polig.reg. di 12 lati (**12**)

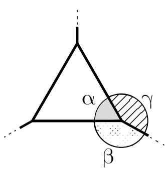
Esistono 4 diversi *Poligiri*, qui sopra ne sono rappresentati solo tre. → Com'è fatto il quarto?

SOLUZIONE → 10 | 5

**POSSIBILE STRATEGIA RISOLUTIVA**




Com'è noto (*e schematicamente illustrato a destra*), gli angoli interni di un poligono regolare di $N$ lati misurano ciascuno $180-\frac{360}{N}$ gradi (corrispondenti a $2\beta$ nel disegno a fianco)




Le regole dei *Poligiri*, assicurano che nei vertici del poligono interno, insistono esattamente tre angoli, ciascuno dei quali è l'angolo interno di un poligono regolare. Due di questi sono dei poligoni esterni di $E$ lati, uno è del poligono interno di $I$ lati. I tre angoli devono formare esattamente un angolo giro, per cui, posto $\alpha=180°-\frac{360°}{I}$, $\beta=180°-\frac{360°}{E}$, si può scrivere $2\alpha+\beta=360°$, cioè $180°-\frac{360°}{I}+2\cdot\left(180°-\frac{360°}{E}\right)=360°$ che, dopo un po' di semplificazioni, diventa $1-\frac{2}{I}=\frac{4}{E}$. Moltiplicando tutto per $IE$ si ottiene prima $IE-2E=4I$ e poi finalmente la seguente "equazione diofantea":

$$\boxed{E \cdot (I-2) = 4 \cdot I}$$

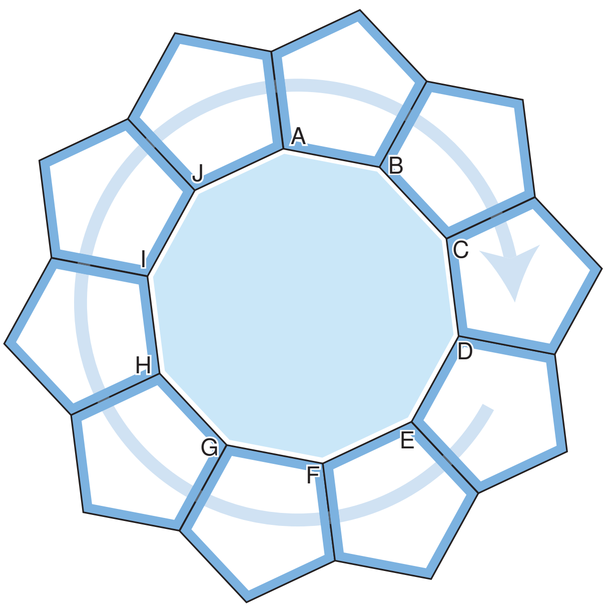
Un'equazione si dice "diofantea", se di essa ci interessano soltanto le soluzioni intere (come nel nostro caso visto che $E$ e $I$ rappresentano delle quantità sicuramente non frazionarie). Per risolvere un'equazione diofantea è bene tenere presente la seguente regola generale:

> Siano $x, y, A, B$ quattro numeri interi diversi da $0$ e legati dall'equazione $Ax = By$. Se $x$ e $y$ sono primi fra loro, se cioè non hanno divisori in comune (diversi da $1$), allora sicuramente $x$ è un divisore di $B$ e $y$ è un divisore di $A$.

Ciò detto possiamo analizzare l'equazione incorniciata e considerare due casi: $I$ dispari e $I$ pari.

| $I$ dispari | $I$ pari |
|---|---|
| Se $I$ è dispari, allora $I$ e $I-2$ sono sicuramente primi fra loro. La regola scritta sopra assicura allora che $I-2$ (che è dispari) deve essere un divisore di $4$, e l'unico divisore dispari di $4$ è $1$. Deve quindi essere $I-2=1$, cioè $\boxed{I=3}$. Ricordando l'equazione diofantea incorniciata sopra, si ha che $E \cdot 1 = 4 \cdot 3 \rightarrow \boxed{E=12}$ | Se $I$ è pari esiste un intero $k$ tale che $I=2k$. Possiamo quindi riscrivere l'equazione incorniciata in alto come $E(2k-2)=8k$ e poi, dividendo i membri per $2$, $\boxed{E \cdot (k-1) = 4 \cdot k}$. Gli interi $k-1$ e $k$ sono senz'altro primi fra loro e questo implica che $k-1$ deve essere un divisore di $4$.<br>Gli unici divisori di $4$ sono $1{,}2{,}4$, per cui $k$ può essere soltanto $2{,}3{,}5$. Ricordando che $I=2k$ e che $E(I-2)=4I$, si hanno i seguenti casi:<br>$k=2 \rightarrow \boxed{I=4} \rightarrow E \cdot 2 = 4 \cdot 4 \rightarrow \boxed{E=8}$<br>$k=3 \rightarrow \boxed{I=6} \rightarrow E \cdot 4 = 4 \cdot 6 \rightarrow \boxed{E=6}$<br>$k=5 \rightarrow \boxed{I=10} \rightarrow E \cdot 8 = 4 \cdot 10 \rightarrow \boxed{E=5}$ |

Tutte le soluzioni da noi trovate mediante considerazioni aritmetiche, corrispondono realmente a figure geometriche. I casi $\boxed{3}\boxed{12}$, $\boxed{4}\boxed{8}$, $\boxed{6}\boxed{6}$ rappresentano infatti i *Poligiri* noti, mentre $\boxed{10}\boxed{5}$ è la soluzione dell'Enigma (*disegnata in basso*). Lo svolgimento appena visto, assicura inoltre che non possano esistere altri *Poligiri* al di là dei quattro citati.




← *il Poligiro* $\boxed{10}\boxed{5}$