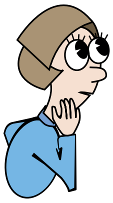
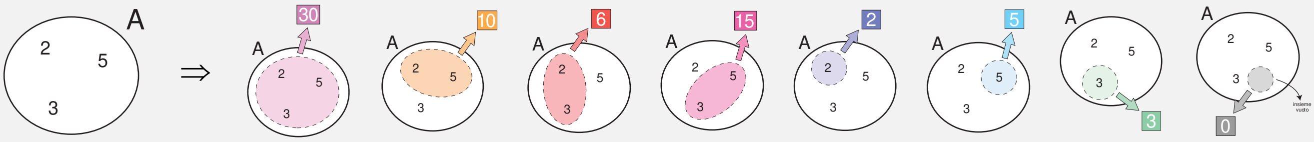


SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Un *Totale*

QUESITO

Dato un insieme considera tutti i suoi possibili sottoinsiemi e di questi, calcola il prodotto degli elementi (*l'esempio in basso riguarda l'insieme* $A=\{2,3,5\}$). È importante osservare che il prodotto degli elementi dell'insieme vuoto (*ultimo disegno*) è posto per definizione uguale a 0.



Sommando ora i prodotti calcolati si ottiene un numero detto $Totale\ dell'insieme$. Nel nostro caso si ha $30+10+6+15+2+5+3+0=71$ e quindi $\{2,3,5\}\xrightarrow{TOTALE}71$.

L'Enigma è molto semplice: Quanto vale il $Totale$ di $\{2,3,4,\ldots,10\}$?

SOLUZIONE **19.958.399**

POSSIBILE SVOLGIMENTO

Per prima cosa è necessario capire come calcolare il $Totale$ di un insieme senza dover passare in rassegna tutti i suoi sottoinsiemi. Per farlo, abbandoniamo momentaneamente il nostro Enigma e consideriamo a titolo di esempio il prodotto $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$. Volendo eseguire la moltiplicazione, sarebbe saggio dividere l'operazione in due fasi, calcolando prima di tutto il prodotto $(a+1)\cdot(b+1)$ e poi, in un secondo momento, moltiplicando il risultato per $(c+1)$. Un'altra possibile strategia, anch'essa corretta ma più spericolata, è di calcolare tutto e subito, premurandosi di selezionare in ciascuna moltiplicazione monomi diversi, uno per ogni binomio e considerando in questo modo tutte le combinazioni possibili. L'elenco in basso dovrebbe chiarire il meccanismo:

$(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=a\cdot b\cdot c$ $\quad(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=a\cdot b$ $\quad(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=a\cdot c$

$(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=b\cdot c$ $\quad(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=a$ $\quad(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=b$

$(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=c$ $\quad(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=1$

Tutti i monomi generati vanno sommati insieme a formare il risultato finale, per cui possiamo concludere che $\boxed{(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=abc+ab+ac+bc+a+b+c+1}$. Quello che abbiamo ottenuto è la somma di tutti i prodotti che si possono creare con i fattori a,b,c a cui si aggiunge un solitario "1". Ricordando la definizione del *Totale di un insieme*, abbiamo trovato che $\boxed{\{a,b,c\}\xrightarrow{TOTALE}(a+1)(b+1)(c+1)-1}$ (il "-1" serve a eliminare il solitario '"1"). La procedura appena vista si può applicare senza modifiche a insiemi formati da un numero arbitrario di elementi, per esempio $\boxed{\{a,b,c,d,e,f\}\xrightarrow{TOTALE}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)-1}$. A parole possiamo enunciare la seguente regola:

> Il $Totale$ di un insieme si calcola considerando il prodotto di tutti i suoi elementi incrementati di 1 e sottraendo 1 alla fine.

Siamo ora in grado di risolvere l'indovinello: applicando la regola incorniciata si ha che il $Totale$ di $\{2,3,4,\ldots,10\}$ è $\boxed{(3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot11)-1}$. Calcolatrice alla mano si ottiene $(11!)/2-1$, cioè appunto $19.958.399$.

Nota bene: un autentico matematico avrebbe da subito posto $\emptyset\xrightarrow{TOTALE}1$ *anziché* $\emptyset\xrightarrow{TOTALE}0$ *(ottenendo tra l'altro una regola di calcolo più semplice), perché si tratta della definizione naturale per oggetti che derivano dalla moltiplicazione (come succede per le potenze, per cui per* $n\neq0$ *si ha* $n^0=1$ *e non* $n^0=0$*).*