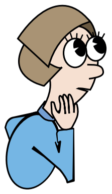

SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Gli autarchici

QUESITO

Un *gruppo autarchico* A_n è una collezione ordinata di n numeri positivi diversi fra loro che, combinati in somme e sottrazioni e mantenuto fisso soltanto l'elemento maggiore, generano sequenze di interi consecutivi a partire da 1 (senza ripetizioni). A titolo di esempio si possono considerare gli insiemi $A_2 = (3/2\ , 1/2\ )$ e $A_3 = (5/2\ , 1\ , 1/2\ )$, che generano rispettivamente le sequenze $1{,}2$ e $1{,}2{,}3{,}4$. Vale inoltre la seguente proprietà: *scrivendo i numeri di un gruppo autarchico in ordine decrescente, si ha che ogni numero è maggiore della somma dei successivi.*

Trova il gruppo autarchico A_5.

SOLUZIONE

$$\left(\frac{17}{2}\ ;\ 4\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$$

POSSIBILE STRATEGIA RISOLUTIVA

Prima di tutto osserviamo che, mantenendo fisso il primo numero e cambiando i segni degli altri quattro, verranno generati complessivamente 16 numeri (infatti vi saranno $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ diverse disposizioni dei segni). Indichiamo con A, B, C, D, E i cinque numeri del gruppo A_5, elencati in ordine decrescente. Considerando il segno di A (sempre $+$) e le restanti 4 operazioni, possiamo rappresentare ciascuno dei 16 numeri che si possono generare con A, B, C, D, E con una cinquina nella forma $\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{+}$ (con il primo simbolo fisso sul $\boxed{+}$). La proprietà dei numeri autarchici scritti in ordine decrescente, di essere ciascuno maggiore della somma dei successivi, permette di disporre le cinquine in ordine di grandezza con grande facilità, dalla maggiore alla minore (*guarda le tabelle in basso e rifletti sul perché le sequenze così ordinate sono sicuramente disposte in ordine di grandezza)*. Visto che le combinazioni in somme e sottrazioni devono restituire tutti i numeri da 1 a 16, si può subito associare a ciascuna cinquina il suo valore:

	A	B	C	D	E		
(I)	+	+	+	+	+	=	16
(II)	+	+	+	+	−	=	15
(III)	+	+	+	−	+	=	14
	+	+	+	−	−	=	13
(IV)	+	+	−	+	+	=	12
	+	+	−	+	−	=	11
	+	+	−	−	+	=	10
	+	+	−	−	−	=	9

	A	B	C	D	E		
(V)	+	−	+	+	+	=	8
	+	−	+	+	−	=	7
	+	−	+	−	+	=	6
	+	−	+	−	−	=	5
	+	−	−	+	+	=	4
	+	−	−	+	−	=	3
	+	−	−	−	+	=	2
	+	−	−	−	−	=	1

Le righe messe in rilievo sono quelle con al massimo un segno $\boxed{-}$ e poi l'ultima, che rappresenta il caso $A - B - C - D - E = 1$. Cambiando tutti i suoi segni essa può essere riscritta simbolicamente come

$\boxed{-}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+} = -1$, molto più utile ai nostri scopi. Indichiamo l'equazione così modificata con (VI). Siamo ora in grado di calcolare i valori di A, B, C, D, E con notevole rapidità.

Confrontando le righe (I) e (II) vediamo che la semplice modifica del segno di E da $\boxed{+}$ a $\boxed{-}$ comporta un cambiamento del valore di 1 (da 16 a 15). La metà di questo scarto è necessariamente il valore di E, per cui $\boxed{E = 1/2}$. In modo analogo si calcolano $D = (16 - 14)/2$, cioè $\boxed{D = 1}$, $C = (16 - 12)/2$, cioè $\boxed{C = 2}$ e $B = (16 - 8)/2$ e quindi $\boxed{B = 4}$. Per trovare A, usiamo la riga aggiuntiva (VI) creata in precedenza e calcoliamo $A = [16 - (-1)]/2$, cioè $\boxed{A = 17/2}$. Questo conclude il calcolo e risolve il problema.

Ultima annotazione: gli elementi del gruppo autarchico generico A_n (che genera tutti i numeri compresi fra 1 e 2^{n-1}) sono $2^{-1}, 2^0, 2^1, \dots 2^{n-2}$ e $(2^n + 1)/2$ (da scrivere in senso contrario se si vuole rispettare l'ordine decrescente).