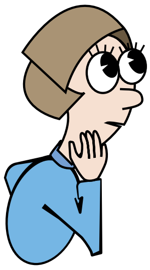
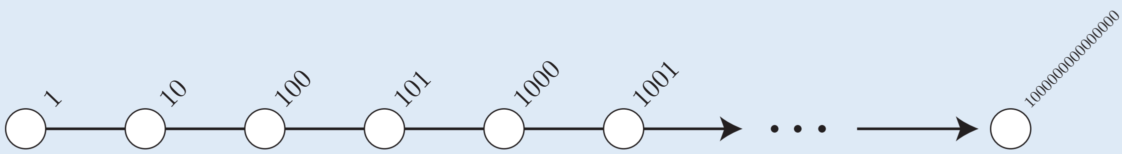


SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Il biliardo

QUESITO

L'Enigma riguarda numeri scritti nel sistema binario: da "1" a "1.000.000.000.000.000" (compresi) quanti sono gli interi che <u>non hanno</u> due "1" affiancati? Nota bene: 1.000.000.000.000.000 ha 15 zeri.



SOLUZIONE → **1597**

POSSIBILE STRATEGIA RISOLUTIVA

Iniziamo introducendo un po' di simboli che serviranno durante il ragionamento: indichiamo con C_n l'insieme di tutte le sequenze di $\boxed{0}$ e $\boxed{1}$ composte da n cifre e <u>prive di coppie vietate</u> $\boxed{1}\boxed{1}$. Chiamiamo poi A_n il sottoinsieme di C_n che contiene le sequenze che iniziano con $\boxed{1}$ e B_n il sottoinsieme delle sequenze che iniziano con $\boxed{0}$. Indichiamo infine con a_n, b_n e c_n il numero di elementi dei rispettivi insiemi. Valgono le seguenti relazioni:

$\boxed{c_n = a_n + b_n}$ Ovvio perché tutte le sequenze di C_n iniziano o con $\boxed{0}$ o con $\boxed{1}$

$\boxed{b_1 = 1}$ e $\boxed{b_2 = 2}$ Infatti $B_1 = \left\{ \boxed{0} \right\}$ e $B_2 = \left\{ \boxed{0}\boxed{0} \; ; \; \boxed{0}\boxed{1} \right\}$

$\boxed{a_n = b_{n-1}}$ Perché ogni sequenza di n cifre che inizia con $\boxed{1}$ può essere generata anteponendo un $\boxed{1}$ ad una sequenza di $n-1$ cifre che inizia con lo $\boxed{0}$.

$\boxed{b_{n+1} = c_n}$ Perché tutte le sequenze di $n+1$ cifre che iniziano con uno $\boxed{0}$, possono essere generate attaccando allo $\boxed{0}$ iniziale una sequenza di C_n (sequenza di n cifre)

Riassumendo abbiamo che $\boxed{b_{n+1}} = c_n = a_n + b_n = \boxed{b_{n-1} + b_n}$. Quest'ultima equazione e i valori $\boxed{b_1 = 1}$ e $\boxed{b_2 = 2}$, definiscono ricorsivamente la successione b_n. Vale per esempio che $b_3 = b_1 + b_2 = 3$, $b_4 = b_2 + b_3 = 5$ e così via.

La soluzione dell'Enigma è b_{16}, cioè il numero di tutte le sequenze di 16 cifre che iniziano con lo $\boxed{0}$. Infatti, interpretando le sequenze in termini strettamente numerici, b_{16} conta tutti i numeri minori di 1.000.000.000.000.000, compreso lo 0. Barattando lo 0 (che non fa parte del conteggio) con il biliardo (che invece va contato), il gioco è fatto. Per calcolare b_{16} possiamo utilizzare la definizione ricorsiva trovata prima o osservare che b_n è F_{n+1}, cioè l'$n+1$-esimo numero di Fibonacci. Sia come sia, il risultato porta proprio a 1597.