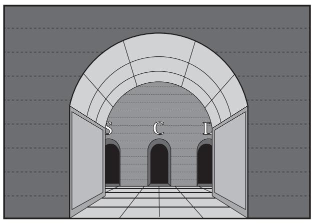
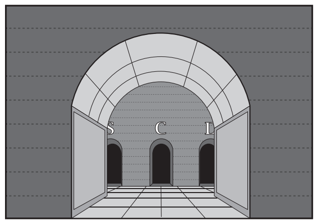
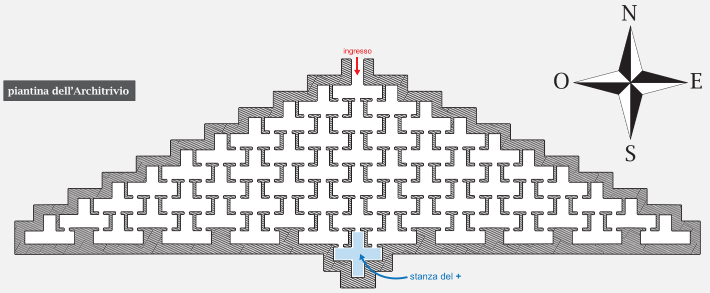




SOLUZIONE DELL'ENIGMA

L'architrivio

QUESITO



L'Enigma riguarda la struttura detta *Architrivio* rappresentata a fianco $(\rightarrow)$. Sul fondo di ogni stanza si aprono tre porte, ciascuna delle quali <u>può essere attraversata soltanto in direzione sud</u> (*vedi rosa dei venti*).
Varcato l'ingresso si tratta di raggiungere la stanza a forma di "+" in fondo alla piantina. Ciò può essere fatto in modi diversi, il più semplice dei quali consiste nel andare sempre dritti, infilando per 5 volte di fila la porta centrale. La domanda è…

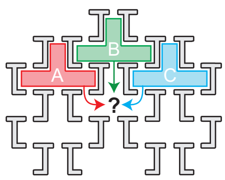
Quanti percorsi diversi (consentiti) portano dall'ingresso alla stanza "+"?

SOLUZIONE **1683**

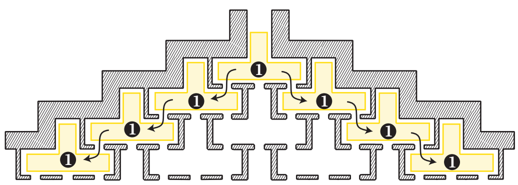
POSSIBILE STRATEGIA RISOLUTIVA

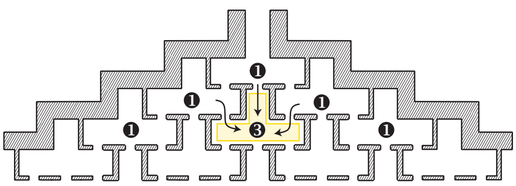
Osserviamo prima di tutto due fatti fondamentali:

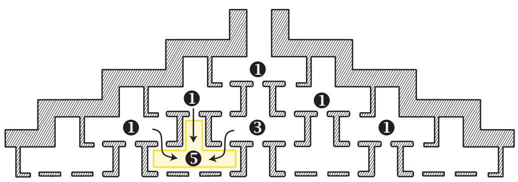
1) Tutte le stanze situate ai bordi della struttura possono essere raggiunte in un solo modo.
2) Per trovarsi in una delle stanze interne, bisogna necessariamente essere passati per uno dei tre ambienti messi in rilievo nella figura a fianco $(\rightarrow)$. Se esistono **A** modi per trovarsi "in alto a sinistra", **B** per trovarsi "in alto al centro" e **C** per trovarsi "in alto a destra", esisteranno necessariamente **A**+**B**+**C** modi per raggiungere la stanza contrassegnata dal punto interrogativo.



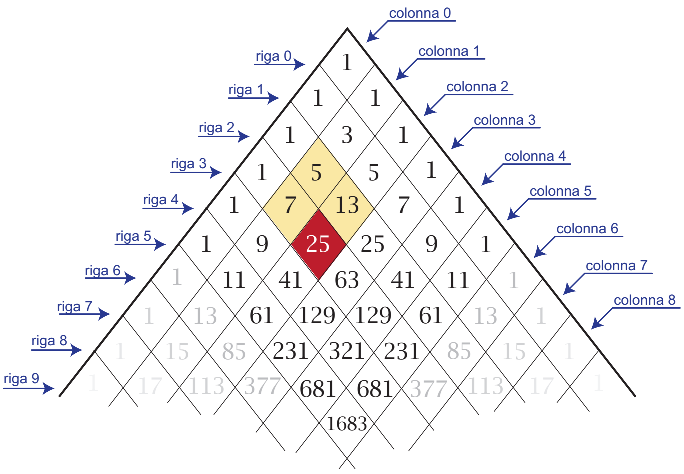
Ciò detto può iniziare il conteggio: per comodità scriviamo in ogni stanza il numero di percorsi che vi conducono. Abbiamo già visto che il caso dei bordi è banale $(\rightarrow)$, perché contrassegnati da soli "1". Possiamo quindi passare al calcolo dei valori interni: si tratta ogni volta di sommare i numeri presenti nelle tre stanze che danno accesso al luogo considerato (*vedi i due esempi in basso*)







È opportuno eliminare dal problema tutte le sovrastrutture grafiche e concentrarci soltanto sull'essenziale: così facendo si genera un triangolo numerico, che chiameremo *Trivio*, simile al *triangolo di Tartaglia* e generato dalle due regole descritte in precedenza (ai bordi stanno tutti "1" e i numeri interni si ottengono dalla somma dei tre numeri sovrastanti). A fianco è rappresentata la cima del triangolo *Trivio*, con un quartetto colorato a illustrare la regola della somma (vale infatti che $5+7+13=25$).



Alla luce della numerazione di righe e colonne proposta in figura (entrambe partono da 0), si vede che la soluzione dell'Enigma è il numero che occupa la riga 10 e la colonna 5: si tratta appunto di **1683**.

Questo modo di procedere funziona bene per un numero di stanze ridotto, male in caso contrario: ad esempio, per determinare il valore centrale della sessantesima riga, bisognerebbe calcolare pressappoco mille addizioni. La commissione Enigma, grazie al genio del suo membro più giovane, ha elaborato la formula sottostante (riquadro in basso a sinistra), che velocizza moltissimo i conti:

$$\boxed{\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = \sum_{i=0}^{\min\{k,n-k\}} \binom{n-i}{k} \binom{k}{i}}$$

per la spiegazione dei simboli vedi la legenda a destra $(\rightarrow)$

$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$	numero del triangolo *Trivio* alla riga n e alla colonna k (vedi numerazione proposta in alto)
$\binom{n}{k}$	coefficiente binomiale
$\sum_{i=0}^{\min\{k,n-k\}}$	somma di tutti i termini successivi al simbolo Σ, facendo variare l'indice i da 0 al più piccolo fra i numeri k e n-k.

Esempio (*l'uso dei due colori serve a rendere l'espressione più facile da leggere*):

$$\left\langle \begin{matrix} 10 \\ 5 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{i=0}^{5} \binom{10-i}{5}\binom{5}{i} = \binom{10}{5}\binom{5}{0} + \binom{9}{5}\binom{5}{1} + \binom{8}{5}\binom{5}{2} + \binom{7}{5}\binom{5}{3} + \binom{6}{5}\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\binom{5}{5} = \ldots$$

$$\ldots = 252 \cdot 1 + 126 \cdot 5 + 56 \cdot 10 + 21 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 252 + 630 + 560 + 210 + 30 + 1 = \boxed{1683}$$