



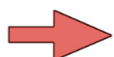
## SOLUZIONE DELL'ENIGMA Totombolo e avanzicchi



### QUESITO

Due numeri si dicono “coprimi” se non hanno fattori primi in comune. Tra tutti i numeri interi da 1 a 3.765.000, esattamente un milione è coprimo a 3.765.000. Quanto vale la loro somma complessiva?

SOLUZIONE



1.882.500.000.000

### POSSIBILE STRATEGIA RISOLUTIVA

È opportuno risolvere il problema in termini generali e poi affrontare il caso particolare.

Fissiamo  $n$  e consideriamo un certo numero  $A$  minore di  $n$  e coprimo ad esso. È abbastanza facile convincersi che se  $A$  non ha divisori comuni con  $n$ , nemmeno il numero  $B = n - A$  può averne. Gli interi coprimi a  $n > 1$  possono quindi essere elencati in coppie  $\{A, B\}$ , tali che  $A + B = n$ .

Vediamo un esempio con il 12: l'insieme dei numeri coprimi a 12 è  $\{1, 5, 7, 11\}$ , unione delle coppie  $\{1, 11\}$  e  $\{5, 7\}$ . Come si vede, entrambe le coppie hanno somma 12.

Dato un certo numero  $n$ , si indica con  $\varphi(n)$  il numero di interi minori di  $n$  e coprimi a  $n$  stesso. Per quanto detto sopra e considerando soltanto i numeri coprimi a  $n$ , devono esistere  $\varphi(n)/2$  coppie  $\{A, B\}$  tali che  $A + B = n$ . Indicata con  $S(n)$  la somma di tutti i coprimi a  $n$ , vale quindi la formula generale incorniciata in basso:

$$S(n) = \frac{\varphi(n) \cdot n}{2}$$

Il testo del problema assicura che per  $n = 3.765.000$   $\varphi(n)$  vale 1.000.000, per cui la soluzione del problema è  $S = \varphi(n) \cdot n / 2 = 1.000.000 \cdot 3.765.000 / 2 = 1.882.500 \cdot 1.000.000$ , equivalente al numero riportato sopra.