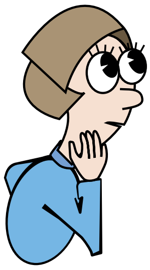

SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Le quaterne majoranee

QUESITO

Trova quattro numeri naturali dispari A, B, C, D tali che

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2$$

SOLUZIONE → **È IMPOSSIBILE**

Dimostrazione

È facile rendersi conto che il quadrato di un numero dispari è sempre <u>un multiplo di 4 più 1</u>. Ad esempio $3^2 = 9 = 8 + 1 = 2 \cdot 4 + 1$, $5^2 = 25 = 24 + 1 = 6 \cdot 4 + 1$, $7^2 = 49 = 48 + 1 = 12 \cdot 4 + 1$. La dimostrazione formale è molto semplice, che voi siate pratici di prodotti notevoli o meno. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale infatti che

$$\boxed{(2n+1)^2} = (2n+1)(2n+1) = 4n^2 + 2n + 2n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1 = \boxed{4M + 1}$$

(dove si è posto $M = n^2 + n$, per cui $M \in \mathbb{N}$).

Sommando tre multipli di 4 incrementati di 1 si ottiene

$$(4A+1) + (4B+1) + (4C+1) = 4(A+B+C) + 3 = \boxed{4N+3}$$

(dove si è posto per semplicità $N = A + B + C$)

cioè un multiplo di 4 incrementato di 3.

Ora, un multiplo di 4 incrementato di 3 non può certo essere uguale a un multiplo di 4 incrementato di 1, il che dimostra che la somma di tre quadrati perfetti dispari non potrà mai essere un quadrato perfetto.