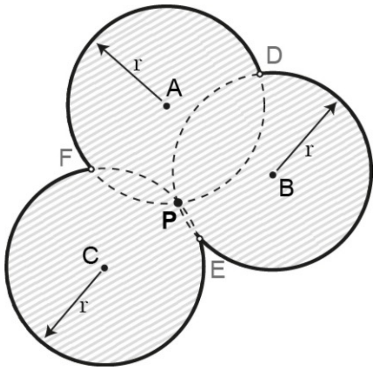
SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Il trifoglio irregolare

sede centrale

Tre circonferenze di raggio r, centri A, B e C e non tangenti fra loro, si intersecano tutte in un punto P, interno al triangolo ABC. Le circonferenze formano, a coppie, ulteriori 3 punti d'intersezione D, E, F, generando la figura a forma di trifoglio irregolare mostrata a fianco.

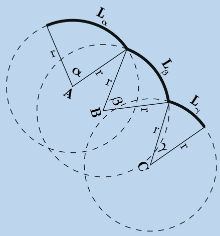


Quanto misura il perimetro del trifoglio?

Nota bene: come mostrato in figura, la posizione reciproca delle circonferenze non gode di nessuna particolare simmetria. Il "perimetro" citato nel quesito è l'insieme dei tre archi di circonferenza $\overset{\frown}{FD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$

Aiuto: per risolvere l'Enigma è conveniente considerare la proposizione sottostante di facile dimostrazione (gli angoli sono espressi in gradi sessagesimali):

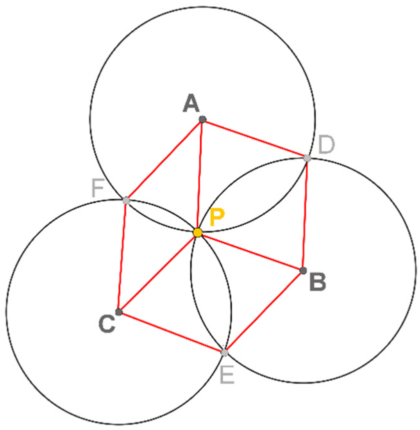
La misura L di un insieme di archi contingui di circonferenze congruenti (cioè tutte di raggio r) definiti dagli angoli $\alpha, \beta, \gamma, ...$, vale $\boxed{L = \pi r \cdot S / 180°}$, dove S è la somma degli angoli ($S = \alpha + \beta + \gamma + ...$)

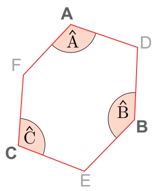


SOLUZIONE → $\boxed{4\pi r}$

POSSIBILE STRATEGIA RISOLUTIVA

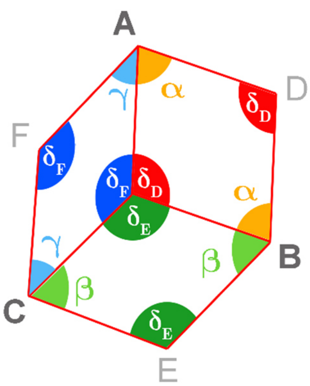
Visto che P è interno al triangolo ABC, l'esagono che collega i punti d'intersezione è sicuramente convesso e contiene il punto P (*vedi l'illustrazione a fianco* $\rightarrow$). Ciascuno dei nove segmenti rossi tracciati in figura è il raggio di una delle tre circonferenze ed ha quindi la stessa lunghezza. I novi segmenti delimitano così tre rombi (e quindi tre parallelogrammi) $PADB$, $PBEC$ e $PCFA$.



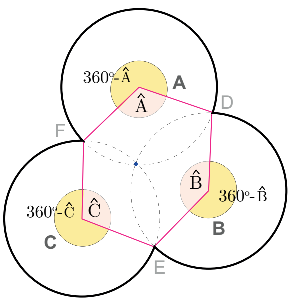


Indicando con $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ i tre angoli interni indicati nella figura piccola $(\leftarrow)$, dimostriamo preliminarmente che $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360°$

Per le proprietà dei parallelogrammi, gli angoli opposti in un rombo sono congruenti fra loro. Questo giustifica l'illustrazione a fianco $(\rightarrow)$ e permette di costruire la catena di congruenze sottostante:



$$\boxed{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}} \cong \alpha+\gamma+\alpha+\beta+\beta+\gamma \cong 2\alpha+2\beta+2\gamma \cong 360°-2\delta_D+360°-2\delta_E+...$$
$$...+360°-2\delta_F \cong 3\cdot 360°-2(\delta_D+\delta_E+\delta_F) \cong 3\cdot 360°-2\cdot 360° \cong \boxed{360°}$$



Considerando ora la somma degli angoli esplementari a $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, calcolando cioè $(360°-\widehat{A})+(360°-\widehat{B})+(360°-\widehat{C})$, otteniamo $3\cdot 360°-(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}) = 2\cdot 360°$. Il valore calcolato è pari all'ampiezza della somma degli angoli al centro i cui archi generano il trifoglio. E' ora banale calcolare la misura del perimetro con la formula $L = \pi r \cdot S / 180°$ e ottenere $L = \pi r \cdot 2\cdot 360°/180° = \boxed{4\pi r}$