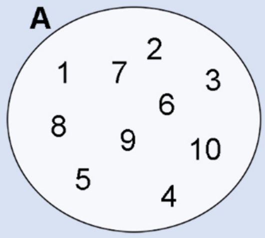
SOLUZIONE DELL'ENIGMA

L'insostenibile peso dei sottoinsiemi

sede centrale

Definendo il ***peso*** di un insieme come la somma di tutti i suoi elementi (cosicché il peso di $P=\{1;8;9\}$ sarebbe 18, perché $1+8+9=18$), considera la seguente questione:

> Che valore si ottiene sommando fra loro i pesi di <u>tutti i possibili sottoinsiemi</u> di $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$?



SOLUZIONE → **28.160**

POSSIBILE STRATEGIA RISOLUTIVA

Prima di tutto contiamo il numero complessivo di sottoinsiemi: ogni sottoinsieme di A contiene o no l'elemento "1", contiene o no l'elemento "2" e così via fino all'elemento "10". Evidentemente il numero di possibili sottoinsiemi coincide con il numero di modi di assegnare i $Sì\,/\,No$ ai dieci elementi e ciò può essere fatto in $\underbrace{2\cdot 2\cdot 2....\cdot 2}_{10\,volte}=2^{10}=1024$ maniere diverse (i sottoinsiemi di A sono quindi 1024).

Questo modo di procedere chiarisce indirettamente un altro aspetto della collezione dei possibili sottoinsiemi di A: esattamente la metà di loro contiene il numero "1" (tutti quelli che nel conteggio precedente avevano un $Sì$ per "1"), esattamente la metà contiene il numero "2" e così via. In altre parole, nella costruzione di tutti i possibili sottoinsiemi, ogni elemento viene "usato" lo stesso numero di volte, pari a $1024/2=512$.

Cerchiamo ora di utilizzare il nostro ragionamento per trovare il numero richiesto (la somma dei pesi di tutti i sottoinsiemi di A), senza calcolare direttamente il valore della lunghissima espressione $1+2...+10+(1+2)+(1+3)+...+(8+9)+(1+2+3)+....$ e così via, composta da ben 1024 somme addizionate fra loro. Disinteressandoci delle inutili parentesi e concentrando l'attenzione su ogni singolo addendo, possiamo dire che l'espressione conterrà complessivamente 512 volte il numero "1", 512 volte il numero "2", 512 volte il numero "3" e così via. Riarrangiando l'espressione in modo diverso, possiamo allora riscrivere la somma come…

$$\underbrace{1+1+...+1}_{512\,volte}+\underbrace{2+2+...+2}_{512\,volte}+....+\underbrace{10+10+...+10}_{512\,volte}=$$

$$512\cdot 1+512\cdot 2+....+512\cdot 10=\boxed{512\cdot(1+2+...+10)}.$$

L'espressione fra parentesi si può anche calcolare a mano, ottenendo $1+2+...+10=55$. Il risultato finale è quindi $512\cdot 55=\boxed{28.160}$.