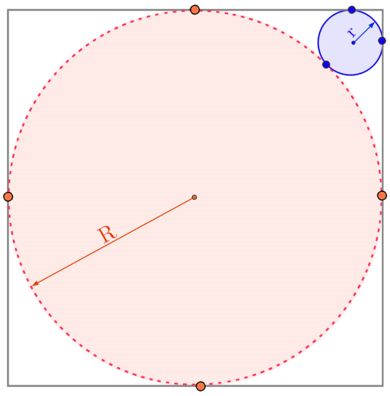
SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Cerchio grande, cerchio piccolo

sede centrale

Un quadrato circoscrive due circonferenze, come mostrato nella figura a fianco $(\rightarrow)$. La prima circonferenza è concentrica al quadrato, la seconda è tangente alla prima e tocca il quadrato in due punti. Indicati con r il raggio della circonferenza piccola e con R il raggio della circonferenza grande, determina il rapporto r/R.



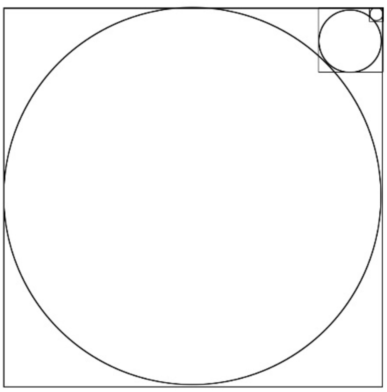
SOLUZIONE

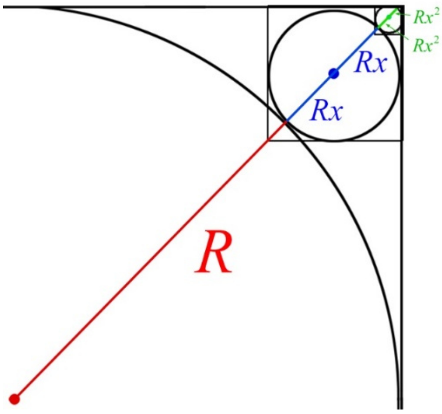
$$\frac{r}{R} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Presento qui due soluzioni, la prima ideata dalla commissione e inutilmente contorta, la seconda, semplice e magnifica, ideata da Federico Iannaccone di 4° C^S^.

Soluzione ideata dalla commissione Enigma

Come si vede a fianco $(\rightarrow)$ la costruzione proposta può essere riprodotta infinite volte, iscrivendo la circonferenza piccola in un nuovo quadrato, il quale circoscriverà così una nuova coppia di circonferenze e così via, a creare una sequenza infinita di figure sempre più piccole. Il rapporto fra i raggi di due circonferenze contigue sarà sempre uguale (r/R), perché tutte le costruzioni riproducono in scala diversa la stessa situazione. Indicato con x il rapporto r/R (da notare che $x<1$), si ha che il primo raggio è R, il secondo $x \cdot R$, il terzo $x^2 \cdot R$ e così via.





Sommando insieme il primo raggio e i diametri (cioè il doppio del raggio) delle successive infinite circonferenze, si ottiene metà diagonale del quadrato grande (vedi a fianco $(\leftarrow)$). E' noto che nel quadrato la diagonale misura $\sqrt{2}$ volte la lunghezza del lato, che in questo problema è $2 \cdot R$. Riassumendo si ha..

$$\boxed{\sqrt{2}R = R + 2Rx + 2Rx^2 + 2Rx^3 + \ldots}$$

Sommando R a sinistra e a destra dell'equazione si passa a $\sqrt{2}R+R=2R+2Rx+2Rx^2+2Rx^3+\ldots$ e quindi a $\sqrt{2}R+R=2R\cdot\left(1+x+x^2+\ldots\right)$. Possiamo ora dividere i membri per $2R$ ed ottenere

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}+1}{2}=1+x+x^2+\ldots}$$

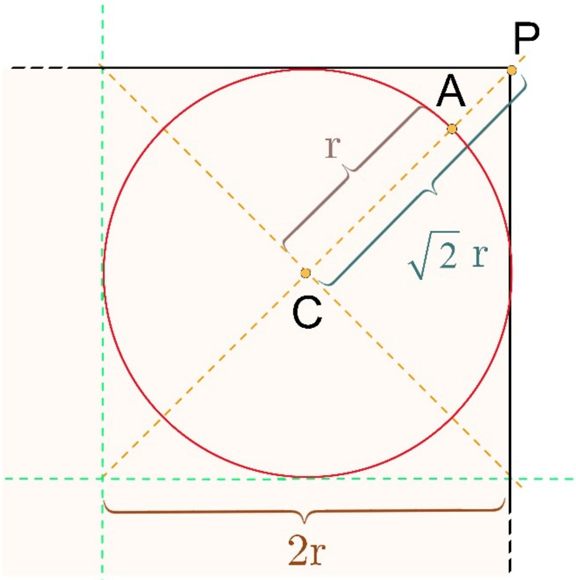
Il membro a destra è una serie geometrica con $|x|<1$, per cui risulta $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$. L'equazione precedente diventa allora …

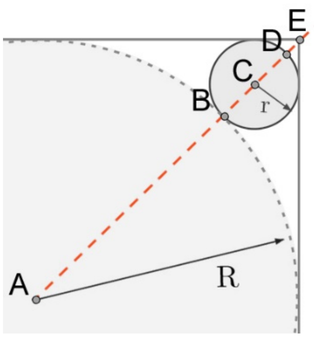
$$\boxed{\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\frac{1}{1-x}}$$

Risolvendo rispetto a x si ricava prima $x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ e poi, razionalizzando, $\boxed{x=3-2\sqrt{2}}$

Soluzione Iannaccone

Dimostriamo preliminarmente il seguente Lemma: consideriamo un angolo retto in P che circoscrive una circonferenza di raggio r e centro C. Indicato con A il punto d'intersezione tra circonferenza e CP, abbiamo che $CA\cong r$ (raggio), $CP\cong\sqrt{2}\cdot r$ (metà della diagonale di un quadrato di lato $2r$) e quindi $AP\cong\sqrt{2}\cdot r-r$ (la differenza delle due lunghezze precedenti). Possiamo riscrivere in forma più compatta $\boxed{AP\cong r\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}$





A questo punto abbiamo tutto quello che ci occorre: il risultato precedente ci assicura infatti che $\overline{BE}\cong R\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$ e che $\overline{DE}\cong r\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$. Evidentemente $\overline{DE}+2r\cong\overline{BE}$ per cui… $2r+r\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=R\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\rightarrow\boxed{r\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=R\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}$.

Ma allora $\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ che, razionalizzato, diventa $\boxed{\frac{r}{R}=3-2\sqrt{2}}$