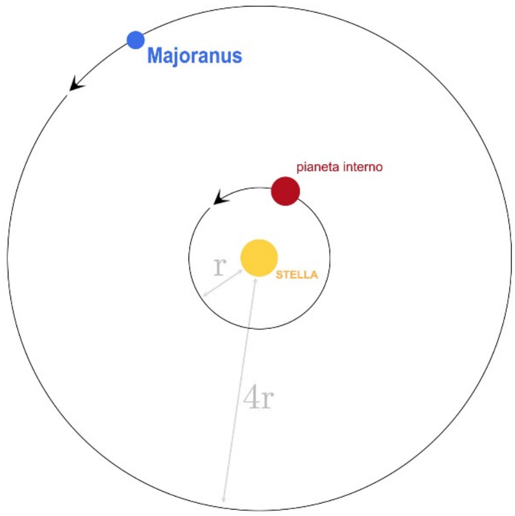
SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Eppur si muove

sede centrale

Due pianeti percorrono nello stesso senso di marcia delle orbite circolari, i cui raggi stanno in un rapporto di 1 a 4. Sapendo che l'anno del pianeta esterno dura 280 giorni, ogni quanto i due pianeti sono allineati con il loro sole?

Avvertenze: Le masse dei due pianeti sono molto piccole rispetto a quella della stella. Inoltre la distanza tra Majoranus e il pianeta interno è tale da rendere la loro mutua interazione gravitazionale assolutamente trascurabile.



soluzione

40 giorni

Possibile svolgimento

$r_M / r_p = 4 \qquad T_M = 280\, giorni \qquad \Delta t_{eclissi} = ?$

Le avvertenze poste in calce al problema garantiscono l'applicabilità della terza legge di Keplero: essa afferma che un pianeta che percorre un'orbita circolare intorno ad una stella deve soddisfare l'equazione $T^2 = r^3 \cdot K$, dove T è il periodo dell'orbita (cioè la durata dell'anno "locale"), r il raggio dell'orbita e K una costante che dipende unicamente dalla stella. Possiamo allora riunire le due equazioni $T_M{}^2 = r_M{}^3 \cdot K$ (*Majoranus*) e $T_p{}^2 = r_p{}^3 \cdot K$ (*pianeta interno*) nella seguente:

$$\boxed{\left(\frac{T_M}{T_p}\right)^2 = \left(\frac{r_M}{r_p}\right)^3}$$

Da $r_M / r_p = 4$ ricaviamo $(T_M / T_p)^2 = 64$ e quindi $T_M / T_p = 8$. E' però più comodo ragionare in termini di velocità angolari: visto che abbiamo a che fare con un moto circolare uniforme possiamo effettuare la sostituzione $T = 2\pi / \omega$ ottenendo da $T_M / T_p = 8$ la nuova relazione

$$\boxed{\omega_p = 8 \cdot \omega_M}$$

Parlando di angoli spazzati, il pianeta interno corre 8 volte più in fretta di quello esterno. Il problema delle eclissi è ora molto simile a quello già visto dell'orologio (il primo Enigma di quest'anno): in quel caso la velocità angolare della lancetta dei secondi era 12 volte quella della lancetta dei minuti. Vediamo però un modo diverso di affrontare la questione: supponiamo che stella e pianeti partano allineati e calcoliamo il tempo necessario all'eclissi successiva. L'angolo spazzato dal pianeta interno in t giorni è $\omega_p \cdot t$, l'angolo spazzato da Majoranus $\omega_M \cdot t$. Chiediamoci ora per quali t i due angoli differiscono di un angolo giro (espresso in radianti), risolviamo cioè l'equazione

$$\boxed{\omega_p \cdot t = \omega_M \cdot t + 2\pi}$$

Ricordando che $\omega_p = 8 \cdot \omega_M$ si ha $8 \cdot \omega_M \cdot t = \omega_M \cdot t + 2\pi$ cioè $\boxed{t = \frac{1}{7} \cdot \frac{2\pi}{\omega_M}}$. Visto che $\frac{2\pi}{\omega_M} = T_M$, la soluzione dell'equazione è $\boxed{t} = \frac{1}{7} \cdot \frac{2\pi}{\omega_M} = \boxed{\frac{1}{7} \cdot T_M}$, che con $T_M = 280$ e $t_0 = 0$ diventa $\boxed{\Delta t_{eclissi}} = \boxed{40\, giorni}$.