Soluzione dell'Enigma

Per un pugno di majeuro

sede centrale

In quanti modi diversi (utilizzando sempre e solo tagli da 1, 2 e 5) si possono cumulare **200** majeuro?

risposta

2081

Possibile strategia risolutiva

Iniziamo risolvendo un caso più semplice: fingiamo che esistano soltanto i "tagli piccoli" da $\boxed{1}$ e da $\boxed{2}$ *majeuro* e andiamo alla ricerca di qualche regola generale relativa alle combinazioni. Nei seguenti riquadri sono rappresentati due casi significativi:

20 majeuro
utilizzando soltanto i tagli da 1 e da 2

11 varianti

Numero di banconote da 2 *majeuro*	Numero monete da 1 *majeuro*
0	20
1	18
2	16
…	…
10	0

21 majeuro
utilizzando soltanto i tagli da 1 e da 2

11 varianti

Numero di banconote da 2 *majeuro*	Numero monete da 1 *majeuro*
0	21
1	19
2	17
…	…
10	1

Focalizzando l'attenzione sulle rispettive prime colonne, risulta chiaro che il numero S_n di modi diversi per ottenere n majeuro mettendo insieme pezzi da $\boxed{1}$ e da $\boxed{2}$, è dato dalla formula $\boxed{S_n = \lfloor n/2 \rfloor + 1}$, dove $\lfloor n/2 \rfloor$ indica l'approssimazione <u>per difetto</u> di $n/2$. Vediamo le controprove relative ai casi succitati:

- $\boxed{S_{20}} = \lfloor 20/2 \rfloor + 1 = \lfloor 10 \rfloor + 1 = 10 + 1 = \boxed{11}$
- $\boxed{S_{21}} = \lfloor 21/2 \rfloor + 1 = \lfloor 10{,}5 \rfloor + 1 = 10 + 1 = \boxed{11}$.

Introduciamo ora la banconota da $\boxed{5}$ e consideriamo il problema di cumulare $\boxed{200}$ *majeuro*. Supponiamo a titolo di esempio di usare 7 banconote da $\boxed{5}$: restano da coprire 200 – 35 = 165 *majeuro* con i "tagli piccoli". La formula trovata precedentemente ci dice che ciò si può fare in $\boxed{S_{165}} = \lfloor 165/2 \rfloor + 1 = \boxed{83}$ modi diversi.

Se invece decidessimo di usare 20 banconote da $\boxed{5}$, resterebbero da mettere insieme con i "tagli piccoli" soltanto 200 – 100 = 100 *majeuro*, cosa che si può fare in $\boxed{S_{100}} = \lfloor 100/2 \rfloor + 1 = \boxed{51}$ modi diversi.

Ragionando su questa falsa riga ma elencando i casi in modo ordinato, diventa chiaro che la soluzione dell'Enigma è uguale alla somma $S_{200} + S_{195} + S_{190} + S_{185} + \ldots + S_5 + S_0$, dove S_{200} corrisponde al caso in cui non viene usata nessuna banconota da $\boxed{5}$, S_{195} al caso di una sola banconota da $\boxed{5}$, S_{190} due banconote da $\boxed{5}$ e così via. Purtroppo non è affatto banale eseguire il calcolo. E' conveniente suddividere i termini in due sommatorie diverse: $S_{200}+S_{195}+S_{190}+S_{185}+...+S_5+S_0=[S_{200}+S_{190}+...+S_0]+[S_{195}+S_{185}+...+S_5]$

Analizziamo la prima:

$$\begin{array}{ccccccccc} S_{200} & + & S_{190} & + & S_{180} & + & ...+ & S_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ \left\lfloor \frac{200}{2} \right\rfloor +1 & + & \left\lfloor \frac{190}{2} \right\rfloor +1 & + & \left\lfloor \frac{180}{2} \right\rfloor +1 & + & ...+ & \left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor +1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ 100+1 & + & 95+1 & + & 90+1 & + & ...+ & 0+1 \end{array}$$

Leggendo i termini dell'ultima riga in senso contrario possiamo riscrivere la somma come $1+6+11+...+101$. La successione $1, 6, 11, ...,101$ è evidentemente una progressione aritmetica composta da 21 termini, per cui, per quanto detto nell'aiuto, vale che $1+6+11+...+101=\frac{21\cdot(1+101)}{2}=\boxed{1071}$.

Analizziamo ora la seconda somma:

$$\begin{array}{ccccccccc} S_{195} & + & S_{185} & + & S_{175} & + & ...+ & S_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ \left\lfloor \frac{195}{2} \right\rfloor +1 & + & \left\lfloor \frac{185}{2} \right\rfloor +1 & + & \left\lfloor \frac{175}{2} \right\rfloor +1 & + & ...+ & \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor +1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ 97+1 & + & 92+1 & + & 87+1 & + & ...+ & 2+1 \end{array}$$

Leggendo i termini in senso contrario possiamo riscrivere l'ultima riga come $3+8+13+...+98$. La successione $3, 8, 13, ..., 98$ è di nuovo una progressione aritmetica composta da 20 termini, per cui, per quanto detto nell'aiuto, vale che $3+8+13+...+98=\frac{20\cdot(3+98)}{2}=\boxed{1010}$.

Sommando i due risultati intermedi troviamo finalmente la soluzione $1071+1010=\boxed{2081}$.