SOLUZIONE DELL'ENIGMA

Il quadratone del Majorana

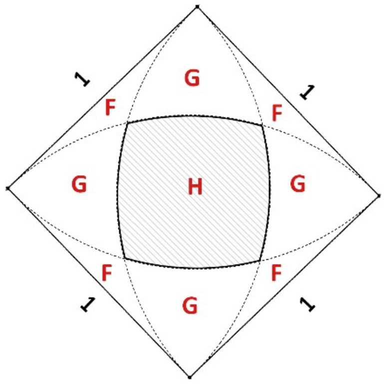
sede centrale

Quanto vale l'area della figura ottenuta intersecando quattro circonferenze di raggio unitario centrate ai quattro vertici di un quadrato di lato 1?

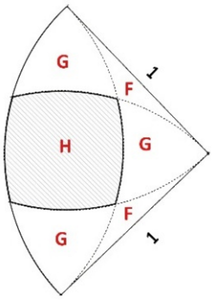
risposta

$$1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

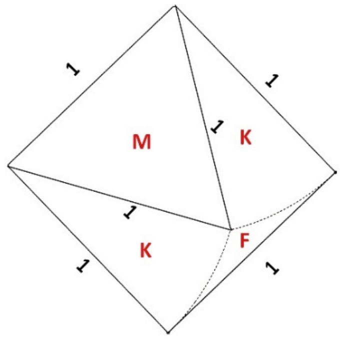
Possibile strategia risolutiva (senza trigonometria):



Possiamo "sezionare" il quadrato originario esterno nelle nove zone mostrate a fianco →. Parlando di aree possiamo senz'altro affermare che il quadrato esterno ha area 1 e quindi $\boxed{4F+4G+H=1}$.

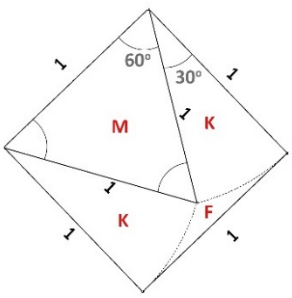


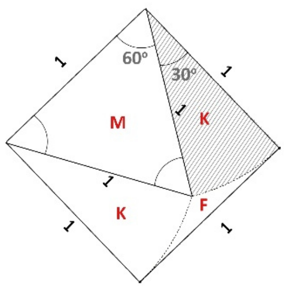
Scegliendo invece soltano le zone "al di qua" di una della circonferenze, abbiamo l'area di un quarto di cerchio unitario (vedi illustrazione a sinistra ←), per cui $\boxed{2F+3G+H=\frac{\pi}{4}}$



Fissiamo ora l'attenzione su una delle "aree F", per esempio quella in basso a destra, e sezioniamo il resto del quadrato in modo nuovo (vedi a fianco →), per un totale di 4 parti:

- M è un triangolo equilatero di lato 1, di cui è molto facile calcolare l'area: essa vale $\sqrt{3}/4$.
- K rappresenta invece la "dodicesima parte" del cerchio unitario (per convincersene basta considerare gli angoli, come illustrato nelle due figure piccole in basso ↓). L'area di ciascun K è quindi $\pi/12$.





Visto che le parti ricomposte formano il quadrato esterno, deve risultare $\boxed{M+2K+F=1}$, cioè $\boxed{F=1-M-2K}$ e quindi finalmente

$$\boxed{F=1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}}$$

Possiamo ora utilizzare le due prime equazioni per trovare G e H. Sottraendo membro a membro la seconda dalla prima si ha infatti $2F+G=1-\frac{\pi}{4}$ e quindi $\boxed{G}=1-\frac{\pi}{4}-2F=1-\frac{\pi}{4}-2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\boxed{\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1}$. Da $4F+4G+H=1$ si ricava infine $H=1-4F-4G=1-4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right)-4\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$, cioè

$$\boxed{\boxed{H}}=1-4+\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}-2\sqrt{3}+4=\boxed{\boxed{\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}}}.$$